SIGNÁLY A SOUSTAVY, SIGNÁLY A SYSTÉMY

TEMATICKÉ OKRUHY

1. Signály se spojitým časem

Základní signály se spojitým časem (základní spojité signály). Jednotkový skok $\sigma(t)$, jednotkový impuls (Diracův impuls) $\delta(t)$. Lineárně rostoucí signál. Harmonický signál $f(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$ a jeho parametry. Manipulace se signály. Je dán signál $s(t)$ rovnicí nebo grafem. Stanovení signálu $s(t - \tau)$, signálu posunutého v čase. Stanovení signálu $s(-t)$, signálu s otočenou (obrácenou) časovou osou. Kombinace otočení časové osy a posunutí v čase. Střední výkon harmonického signálu. Stejnosměrná složka a střední výkon periodického impulsu (periodického sledu obdélníkových impulsů).

2. Periodické signály se spojitým časem

Definice (spojitého) periodického signálu. Fourierova řada v komplexním tvaru (Fourierova řada periodické funkce), $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k \exp(k\omega_1 t)$. Modul a argument komplexního koeficientu Fourierovy řady. Velikost a znaménko stejnosměrné složky periodického signálu a její určení z množiny koeficientů Fourierovy řady. Určení amplitudy harmonické složky periodického signálu $f(t)$, je-li dán koeficient c_k, $k \neq 0$, Fourierovy řady. Spektrum modulů a spektrum argumentů (amplitudové spektrum a fázové spektrum). Spektrum periodicky se opakujících obdélníkových impulsů.

3. Analýza spojitých aperiodických signálů

Fourierova transformace, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$. Vzor a obraz (signál a spektrální funkce). Inverzní Fourierova transformace. Modul obrazu (amplitudové spektrum), argument obrazu (fázové spektrum). Vlastnosti obrazu **reálného** vzoru (vlastnosti reálné a imaginární části obrazu obecného reálného signálu). Vlastnosti obrazu sudého a lichého vzoru. Posunutí vzoru (posunutí funkce, posunutí signálu) v čase. Spektrum pravoúhlého impulsu. Energie obdélníkového impulsu.

4. Vnější popis lineárních soustav se souvislým časem

Lineární časově invariantní (lineární neparametrické) systémy a jejich popis. Diferenciální rovnice systému. Operátorový přenos systému (obvyklá značení: $F(p)$, $H(p)$, $K(p)$). Nuly a póly. Určení operátorového přenosu systému na základě diferenciální rovnice systému. Rozklad na částečné zlomky. Frekvenční přenos systému (komplexní kmitočtová charakteristika, $F(j\omega), H(j\omega), K(j\omega)$). Amplitudová (modulová) kmitočtová charakteristika. Fázová (argumentová) kmitočtová charakteristika. Impulsní charakteristika $g(t)$ a přechodová charakteristika $h(t)$.

T5 Vzorkování

Ideální vzorkování. Periodizace spektra při vzorkování. Vzorkovací kmitočet (vzorkovací frekvence). Signál s omezeným spektrem. Vzorkovací teorém. Aliasing efekt. Rekonstrukce signálu se spojitým časem z jeho vzorků - frekvenční pohled (rekonstrukce v kmitočtové oblasti). Frekvenční přenos (přenosová funkce) ideálního rekonstrukčního filtru. Rekonstrukce signálu ze vzorků – časový pohled (rekonstrukce v časové oblasti).

6. Diskrétní signály

Diskrétní normovaný čas (značení: *k*, *n*) a skutečný čas (*kT*, *nT*). Signály s diskrétním časem. Diskrétní jednotkový impuls ($\delta(k),\ \delta(n)$). Diskrétní jednotkový skok ($\sigma(k),\ \sigma(n)$). Harmonická posloupnost ($f(kT) = C\cos(\Omega kT + \varphi),\ \ f(k) = C\cos(\omega k + \varphi)$). Otázka periodicity harmonické posloupnosti. Manipulace s diskrétními signály. Posun v čase. Otočení časové osy. Otočení časové osy s posunutím. Pravoúhlé okno.

7. Diskrétní Fourierova řada a Fourierova transformace diskrétního signálu

Diskrétní Fourierova řada. Definice. Nechť *s*(*n*) je periodická posloupnost s periodou *n*. Pak obraz $S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$. Obraz (koeficienty diskrétní Fourierovy řady) je také periodická posloupnost s periodou *N*. Zpětná diskrétní Fourierova řada, $s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)$.

Fourierova transformace diskrétního signálu. Je označována $F(\omega),\ \ S\left(e^{j\omega}\right)$.

$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$. Posloupnost *f*(*n*) je vzor, $F(\omega)$ je obraz. Periodicita funkce $F(\omega)$.

8. Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (DFT). Přiřazuje vzoru $f(n),\ \ n = 0, 1, ..., N-1$, obraz $S(k),\ \ k = 0, 1, ..., N-1$. $S(k) = \sum_{n=0}^{N\text{-}1} f(n)\exp\left(\text{-}\ jk\frac{2\pi}{N}n\right)$ Zpětná diskrétní Fourierova transformace. $f(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N\text{-}1} S(k)\exp\left(jn\frac{2\pi}{N}k\right)$. Pojem rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform, FFT).

9. Vnější popis diskrétních systému

Vnější popis systémů s diskrétním časem. Diferenční rovnice. Operátorový přenos systému (přenosová funkce systému) *F*(*z*), *H*(*z*). Póly a nulové body. Z-transformace, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$, $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}$. Z-transformace jednotkového skoku, jednotkového impulsu a reálného exponenciálního signálu. Vlastnosti Z-transformace. Linearita transformace a obraz posunuté posloupnosti. Nulové body a póly.

10. Frekvenční přenos diskrétního systému

Frekvenční přenos (kmitočtové charakteristiky) systému s diskrétním časem, $F(j\omega),\ \ H(\mathrm{e}^{j\omega})$. Uvažujeme *T* = 1. Pak $F(j\omega) = F(z)\big|_{z=\exp(j\omega)} = H\left(e^{j\omega}\right)$. Impulsní charakteristika diskrétního systému. Vztah impulsní charakteristiky k přenosu systému FIR.

VZOROVÉ PŘÍKLADY

Příklad T1/1

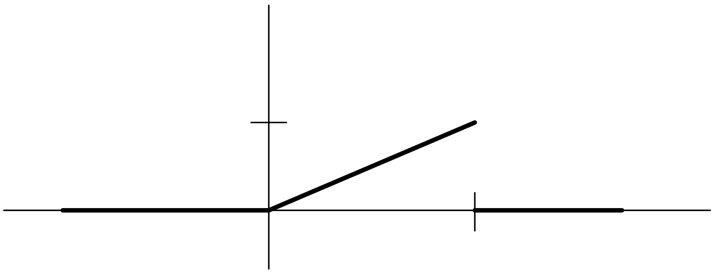
Je dán signál

$$s(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t<0,\\ 0{,}5t & \text{pro } 0\le t<3 \text{ a}\\ 0 & \text{pro } t\ge 0.\end{cases}$$

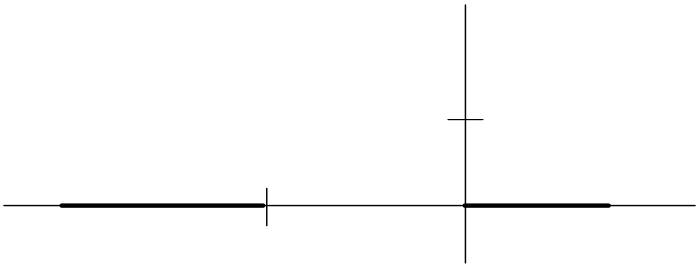
Pro $|t|<3$ nakreslete graf signálu $s(-t+2)$.

Řešení

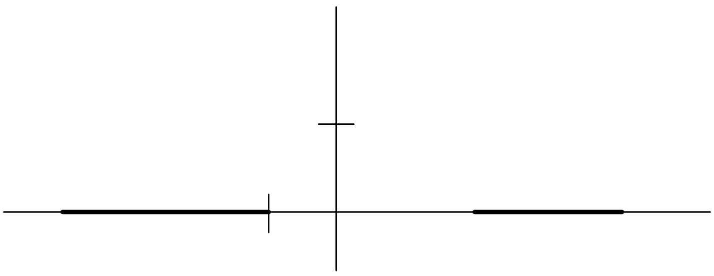
Nejprve nakreslíme graf signálu $s(t)$:



Pak nakreslíme graf signálu $s(-t)$:



A nakonec posunutím v čase získáme signál $s(-t+2)$:



Příklad T2/1

Reálný periodický signál má jen 3 od nuly různé koeficienty Fourierovy řady. Jsou dány hodnoty dvou těchto koeficientů $c_0 = -1$, $c_1 = 1{,}4\exp(-j0{,}3\pi)$ a perioda signálu T_1 =0,4. Určete třetí koeficient (využijte toho, že signál je reálný). Určete okamžitou hodnotu signálu v čase $t = 0{,}1$.

Řešení

Vzhledem k tomu, že je signál reálný, je třetí koeficient roven komplexně sdružené hodnotě koeficientu c_1 tedy $c_{-1} = 1{,}4\exp\left(+j0{,}3\pi\right)$. Pro kmitočet základní harmonické platí

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi$$

Časový průběh signálu je pak určen jako $f\left(t\right) = c_{-1}\exp\left(-j\omega_1 t\right) + c_0 + c_1\exp\left(j\omega_1 t\right)$. Dosazením hodnot obdržíme

$$f\left(t\right) = c_{-1}\exp\left(-j\omega_1 t\right) + c_0 + c_1\exp\left(j\omega_1 t\right) =$$
$$= 1{,}4\exp\left(+j0{,}3\pi\right).\exp\left(-j5\pi t\right) - 1 + 1{,}4\exp\left(-j0{,}3\pi\right).\exp\left(+j5\pi t\right)$$

V čase $t = 0{,}1$ bude hodnota signálu rovna

$$f\left(0{,}1\right) = 1{,}4\exp\left(+j0{,}3\pi\right).\exp\left(-j0{,}5\pi\right) - 1 + 1{,}4\exp\left(-j0{,}3\pi\right).\exp\left(+j0{,}5\pi\right) =$$
$$= -1 + 1{,}4\exp\left(-j0{,}2\pi\right) + 1{,}4\exp\left(+j0{,}2\pi\right) = -1 + 1{,}4\left(2\cos\left(0{,}2\pi\right)\right) = 1{,}265$$

Příklad T3/1

Signál $f(t)$ je zadán svým obrazem $F(\omega)$ ve Fourierově transformaci:

$$F(\omega) = \begin{cases} 60 \quad pro \quad \omega = 0 \quad a \\ 60\dfrac{\sin 15\omega}{15\omega} \quad pro \quad \omega \neq 0. \end{cases}$$

Stanovte okamžitou hodnotu signálu $f(t\text{-}8)$ pro $t = -2$ s.
Pomůcka: Nejprve určete spektrum sudého signálu, který má tvar pravoúhlého impulsu s výškou D a šířkou ϑ.

Řešení

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt = D\int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} \exp(-j\omega t)dt = \begin{cases} D\vartheta \quad \text{pro} \quad \omega = 0 \quad \text{a} \\ D\vartheta\dfrac{\sin\frac{\vartheta}{2}\omega}{\frac{\vartheta}{2}\omega} \quad \text{pro} \quad \omega \neq 0. \end{cases}$$

Signál $f(t)$ je tedy obdélníkovým impulsem se součinem výšky D a šířky ϑ rovným 60. Polovina šířky impulsu je 15. Odtud $\vartheta = 30$ a $D = \frac{60}{30} = 2$. Po nakreslení grafu signálu $f(t)$ snadno zjišťujeme, že $f(-2-8) = f(-10) = 2$.

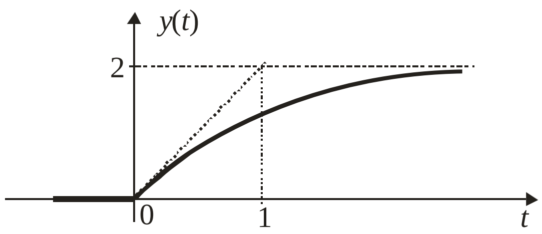
Příklad T4/1

Lineární, časově invariantní systém je popsán diferenciální rovnicí $y'(t)+y(t)=2x(t)$ s nulovou počáteční podmínkou a kde $x(t)$ je vstup systému a $y(t)$ je výstup systému. Na vstup systému působí signál $x(t)=\sigma(t)$. Určete průběh výstupu a načrtněte.

Pomůcka: $L\{e^{-at}\}=\dfrac{1}{p+a}$

Řešení

Pro operátorový přenos systému platí $F(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{2}{p+1}$. Pro Laplaceův obraz vstupního signálu platí $\mathrm{X(p)}=\dfrac{1}{p}$. Pro Laplaceův obraz výstupu pak platí $Y(p)=F(p)X(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{2}{p+1}$. Rozkladem tohoto výrazu na parciální zlomky obdržíme $Y(p)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{2}{p+1}$. Časový průběh je dán zpětnou Laplaceovu transformací, tedy pro $t\geq 0$ platí $y(t)=2-2e^{-t}=2(1-e^{-t})$.



Příklad T5/1

Fourierova řada spojitého periodického signálu má tvar $f(t)=\sum_{n=-4}^{+4} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$. Základní perioda T signálu je 1msec. Tento signál je vzorkován a vzorky jsou vstupním signálem ideální dolní propusti. Jaký musí být vzorkovací kmitočet aby na výstupu dolní propusti byl tentýž spojitý signál?

Řešení

Horní mezní kmitočet $f_{\max}$ spektra signálu $f(t)$ je dán kmitočtem čtvrté harmonické složky. $f_{\max}=4.\dfrac{1}{1.10^{-3}}=4.10^{3}$ Hz. Vzorkovací kmitočet proto musí být větší, než 8 tisíc vzorků za sekundu.

Příklad T6/1

Pro $k=3$ určete hodnotu signálu $f(k)=5\cos(0{,}5\pi k-0{,}5\pi)+\delta(k-4)+2\sigma(k-1)$.

Řešení

$f(3)=5\cos(0{,}5\pi 3-0{,}5\pi)+\delta(3-4)+2\sigma(3-1)=-5+0+2=-3$.

Příklad T7/1

Je dána periodická posloupnost s periodou 4: $s(0)=1$, $s(1)$ = 0, $s(2)$ = 0, $s(3)$ = 2. Stanovte prvek $S(3)$ obrazu. Pomůcka: $S(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$.

Řešení

$$S(3)=\sum_{n=0}^{3} s(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{4}3n\right)=1\exp(0)+0+0+2\exp(-j\frac{2\pi}{4}3.3)=1-2j.$$

Příklad T8/1

Obraz v diskrétní Fourierově transformaci je tvořen právě těmito čtyřmi prvky: $S(0)=2$, $S(1)$ =1-j, $S(2)$ = 0, $S(3)$ = 1+j. Stanovte prvek $f(2)$ vzoru. Pomůcka:

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N\text{-}1} S(k)\exp\left(jn\frac{2\pi}{N}k\right).$$

Řešení

$$f(2)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} S(k)\exp\left(j2\frac{2\pi}{4}k\right)=\frac{1}{4}\left[2\exp(0)+(1-j)\exp(j\pi)+0+(1+j)\exp(j3\pi)\right]=0.$$

Příklad T9/1

Systém s diskrétním časem má přenosovou funkci $F(z)=1+z^{-1}$. Určete amplitudu ustálené harmonické odezvy $y(n)=Y\cos(\omega n+\psi)$ na posloupnost $x(n)=X\cos(\omega n+\varphi)=5\cos(0{,}2\pi n+0{,}4\pi)$. Symbol n označuje normovaný (celočíselný) čas, symbol ω označuje normovaný úhlový kmitočet.

Řešení

$$F\left(z=e^{j0{,}2\pi}\right)=1+e^{-j0{,}2\pi}$$

$$Y=5.\left|1+e^{-j0{,}2\pi}\right|\doteq 5.1{,}9021\doteq 9{,}51\,.$$

Příklad T10/1

Je dán přenos $F(z)=2+\mathrm{z}^{-1}+\mathrm{z}^{-2}$. Určete impulsní charakteristiku systému.

Řešení

Při použití pouček o linearitě Z-transformace, poučky o obrazu opožděného signálu a znalosti obrazu funkce $\delta(n)$ zjišťujeme, že impulsní charakteristika $g(n)$ systému je dána vztahem

$$g(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\,.$$

Poznámka: V některých učebnicích se místo označení $g(n)$ používá označení $h(n)$.