# INVARIANT T-NORM TRANSFORMATION

**Vojtěch Havlena**
Bachelor Degree Programme (2), FIT BUT
E-mail: xhavle03@stud.fit.vutbr.cz

Supervised by: Dana Hliněná[1], Martin Kalina[2]
E-mail: [1]hlinena@feec.vutbr.cz, [2]kalina@math.sk

**Abstract**: This paper deals with invariant transformations of the triangular norms. We bring examples of transformation of Frank's and Yager's t-norms by the diagonal functions. We also determine conditions of invariant transformation with the diagonal and the general bijective functions for triangular norms with specific properties.

**Keywords**: t-norm, invariant transformation, diagonal function

## 1 ÚVOD

Triangulární norma (zkráceně t-norma) je binární komutativní, asociativní a monotónní operace s okrajovou podmínkou na jednotkovém intervalu, která se uplatňuje v různých odvětvích matematiky. Triangulární normy byly uvedeny v teorii pravděpodobnostních metrických prostorů, ale používají se i například ve fuzzy množinách a fuzzy logice, kde zobecňují operaci logické konjukce [1].

Triangulární normy mohou být generovány rozličnými způsoby. V tomto článku uvažujeme generování pomocí transformace existující t-normy [2]. Výsledná (transformovaná) t-norma $T_\varphi$ je dána předpisem:

$$T_\varphi(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} & \text{pokud } \max\{x,y\} = 1, \\ \varphi^{(-1)}[T(\varphi(x),\varphi(y))] & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $T$ je t-norma a $\varphi^{(-1)}$ je pseudoinverzní funkce k funkci $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, což je monotónní zobecnění klasické inverzní funkce. Hlavním cílem tohoto článku je studium situací, kdy je transformace invariatní vůči původní t-normě.

Pro úplné porozumění se předpokládá znalost triangulárních norem, jejich vlastností a způsob jejich reprezentace pomocí aditivních generátorů.

## 2 PŘÍKLADY TRANSFORMACÍ POMOCÍ DIAGONÁLNÍCH FUNKCÍ

Nejprve si uvedeme definici diagonálních funkcí t-normy. Jak si ukážeme dále, tyto funkce hrají při invariatní transformaci důležitou roli.

**Definice 2.1.** *[1] Nechť $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma. Potom funkci $\delta_n : [0,1] \to [0,1]$ definovanou jako*

$$\delta_1(x) = x, \quad \delta_{n+1}(x) = T(\delta_n(x), x), \quad \textit{pro } x \in [0,1], n \in \mathbb{N},$$

*nazýváme diagonální funkcí t-normy $T$. Dále množinu všech diagonálních funkcí t-normy $T$ označujeme $\Delta_T = \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

V následujících příkladech je ukázána invariatní transformace třídy Frankových a Yagerových triangulárních norem [1] pomocí jejich diagonálních funkcí. Budeme tedy uvažovat, že $\varphi = \delta_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

**Příklad 2.1.** Třída Frankových t-norem je dána předpisem:

$$T_p^F(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{pokud } p = 0, \\ T_P(x,y) & \text{pokud } p = 1, \\ T_L(x,y) & \text{pokud } p = +\infty, \\ \log_p\left(1 + \frac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}\right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Diagonální funkce Frankových t-norem jsou tedy dány předpisem:

$$\delta_{n,p}^F(x) = \begin{cases} x & \text{pokud } p = 0, \\ x^n & \text{pokud } p = 1, \\ \max\{0, nx - n + 1\} & \text{pokud } p = +\infty, \\ \log_p\left(1 + \frac{(p^x-1)^n}{(p-1)^{n-1}}\right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Není obtížné dokázat, že transformace libovolné $T_p^F$ odpovídajícími diagonálními funkcemi je invariatní. Dalším příkladem bude transformace Yagerových t-norem.

**Příklad 2.2.** Třída Yagerových t-norem je dána předpisem:

$$T_p^Y(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & \text{pokud } p = 0, \\ \max\left\{0, 1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}\right\} & \text{pokud } 0 < p < +\infty, \\ T_M(x,y) & \text{pokud } p = +\infty. \end{cases}$$

Diagonální funkce Yagerových t-norem jsou dány předpisem:

$$\delta_{n,p}^Y(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{pokud } p = 0, \\ \max\left\{0, 1 - (n(1-x)^p)^{\frac{1}{p}}\right\} & \text{pokud } 0 < p < +\infty, \\ x & \text{pokud } p = +\infty. \end{cases}$$

Při transformaci Yagerových t-norem odpovídajícími diagonálními funkcemi opět vznikne původní t-norma.

## 3 HLAVNÍ VÝSLEDKY

**Tvrzení 3.1** (Nutná podmínka invariatnosti). *Nechť $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma, $\delta_n(x)$ jsou její diagonální funkce a $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ je neklesající surjektivní funkce. Potom pokud je $\varphi$-transformace invariatní vůči t-normě $T$, potom $\varphi \circ \delta_n(x) = \delta_n \circ \varphi(x)$ pro každé $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.*

*Důkaz.* Vzhledem k tomu, že $\varphi$ je neklesající surjekce, původní t-norma vznikne právě tehdy, když $\varphi(T(x,y)) = T(\varphi(x), \varphi(y))$. Tedy i $\varphi \circ \delta_n(x) = \delta_n \circ \varphi(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. □

**Tvrzení 3.2.** *Nechť $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je striktní t-norma. Dále předpokládáme funkci $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. Potom pokud $\varphi \in \Delta_T$, potom $\varphi$-transformací vznikne původní t-norma.*

*Důkaz.* Vzhledem k tomu, že funkce $\varphi$ je bijekce, platí $\varphi(T_\varphi(x,y)) = T(\varphi(x), \varphi(y))$. Podle předpokladu, že $\varphi \in \Delta_T$, budeme dále psát jen $\delta_n(T_\varphi(x,y)) = T(\delta_n(x), \delta_n(y))$, pro $n \in \mathbb{N}$. Důkaz, že $T_\varphi = T$, provedeme indukcí podle $n$.

1. Pro $n = 1$ je rovnost splněna triviálně. Pro $n = 2$ budeme předpokládat spor, že existují nějaké $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ takové, že $T(x_0, y_0) \neq T_\varphi(x_0, y_0)$. Potom ale
$$T(T(x_0,y_0),T(x_0,y_0)) = \delta_2(T(x_0,y_0)) \neq T(\delta_2(x_0),\delta_2(y_0)) = T(T(x_0,y_0),T(x_0,y_0)),$$
což je spor (v předchozím kroku jsme využili asociativnosti $T$ a toho, že funkce $\delta_n^{-1}$ je ostře rostoucí). Tedy $T_\varphi = T$ pro transformaci funkcí $\delta_2$.

2. Nyní předpokládáme, že rovnost platí pro $\delta_1, \ldots, \delta_n$ a dokážeme, že platí i pro $\delta_{n+1}$.
$$T_\varphi(x,y) = \delta_{n+1}^{-1}(T(\delta_{n+1}(x),\delta_{n+1}(y))) \Rightarrow \delta_{n+1}(T_\varphi(x,y)) = T(\delta_{n+1}(x),\delta_{n+1}(y)) \Rightarrow$$
$$T(\delta_n(T_\varphi(x,y)),T_\varphi(x,y)) = T(T(\delta_n(x),x),T(\delta_n(y),y)).$$
Podle indukčního předpokladu a z asociativnosti t-normy $T$ dále plyne
$$T(T(\delta_n(x),\delta_n(y)),T_\varphi(x,y)) = T(T(\delta_n(x),\delta_n(y)),T(x,y)).$$
Vzhledem k tomu, že $T$ je strikně rostoucí, platí $T_\varphi = T$.

Transformací diagonální funkcí vznikne tedy původní t-norma. $\square$

**Tvrzení 3.3.** *Nechť* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je spojitá archimedovská t-norma a* $f : [0,1] \to [0,\infty]$ *je její aditivní generátor. Dále uvažujme bijektivní funkci* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$*. Potom* $\varphi$*-transformací vznikne původní t-norma právě tehdy, když existuje* $\alpha > 0$*:* $\alpha f(x) = f \circ \varphi(x)$ *(Schröderova rovnice).*

*Důkaz.* ($\Leftarrow$) Transformovaná t-norma $T_\varphi$ je dána předpisem
$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}[T(\varphi(x),\varphi(y))] = \varphi^{-1} \circ f^{-1}(\min\{f\circ\varphi(x) + f\circ\varphi(y), f(0)\}).$$
Vzhledem k tomu, že $T_\varphi$ je opět spojitá archimedovská t-norma, je její aditivní generátor dán předpisem $g(x) = f \circ \varphi(x)$. Také ale existuje $\alpha > 0$, takové, že $g(x) = \alpha f(x)$, tedy $f$ a $g$ se liší pouze kladnou multiplikativní konstantou. Generátor $g$ je tedy také generátor t-normy $T$ a tím pádem $T_\varphi = T$.

($\Rightarrow$) Nyní předpokládáme, že platí $T_\varphi(x,y) = T(x,y)$, pro každé $(x,y) \in [0,1]^2$ tedy
$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}[T(\varphi(x),\varphi(y))] = T(x,y).$$
Aditivní generátor t-normy $T_\varphi$ je dán předpisem $g(x) = f \circ \varphi(x)$, ale vzhledem k tomu, že se obě t-normy rovnají, musí existovat nějaké $\alpha > 0$ takové, že $f \circ \varphi(x) = \alpha f(x)$. $\square$

Všechny bijektivní funkce na jednotkovém intervalu $\varphi$, při jejichž transformaci dané t-normy $T$ vznikne původní t-norma, tvoří grupu automorfismů $\mathbf{Aut}(T)$. Tvrzením 3.3. se nám tuto grupu pro archimedovské t-normy podařilo klasifikovat.

# 4 ZÁVĚR

V tomto příspěvku jsme ukázali, že transformace diagonálními funkcemi jistých triangulárních norem je invariatní. Dále se nám podařilo určit podmínky, při kterých transformací vzniká původní t-norma. Dokázali jsme také spojitost mezi invariantností a aditivními generátory. V dalším pokračování práce bychom se rádi zabývali invariatností transformací uninorem, které zobecňují triangulární normy.

# REFERENCE


[1] Alsina, C.; Schweizer, B.; Frank, M.: *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*. World Scientific, 2006, ISBN 981-256-671-6.

[2] Jenei, S.: Fibred Triangular Norms. *Fuzzy Sets Syst.*, ročník 103, č. 1, Duben 1999: s. 67–82, ISSN 0165-0114.