FRACTALS IN IMAGES

Martin VALLA, Bachelor Degree Programme (3)
Dept. of Biomedical Engineering, FEEC, BUT
E-mail: xvalla00@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Dr. Radim Kolář

ABSTRACT

This article describes two methods for calculating the fractal dimension (FD) of images – the Box counting metod (BCM) and the Power spectrum method. The FD is a non-integer parameter of textured objects that can be used for image analysis or segmentation. The FD estimation is based on the resolution invariance of images.

1 ÚVOD

Cílem projektu je úvod do teorie fraktálu a aplikace těchto poznatků pro analýzu obrazů. Termín *fraktál* pochází z latinského slova *fractus,* čili zlomek. Fraktály se nazývají útvary, které mají neceločíselnou dimenzi a jsou soběpodobné. *Soběpodobnost* je vlastnost, která se vyskytuje v případě, když struktura vypadá stejně v jakémkoliv zvětšení. Matematicky se tato vlastnost nazývá *invariance vůči změně měřítka.* U každého objektu lze také spočítat jeho dimenzi. Existuje mnoho algoritmů výpočet této veličiny. Provedl se cílený výběr jedné z mnoha metod – Metoda výpočtu políček (BCM, z angl. Box Counting Method) a její realizace v prostředí Matlab. Pro srovnání je vybrána další metoda s rozdílným přístupem.

2 APLIKACE PRO ANALÝZU OBRAZŮ

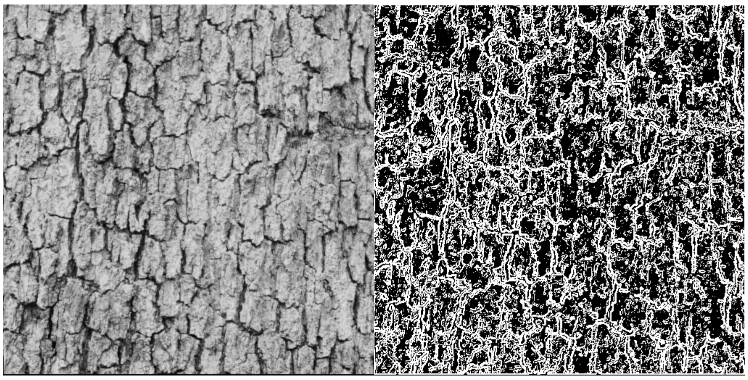
Využití v medicíně například u patologických stavů mozku a nervového systému. Další uplatnění je pro analýzu spojení tkání. Díky výpočtům fraktální dimenze se realizuje další pohled na strukturu, složitost a chaos v nádoru. Stejných principů lze použít pro rozřazení struktur v obrazové analýze na radiologii a ultrasonografii. [1] Základní vzorec pro výpočet dimenze [2] je ve tvaru:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \qquad (1)$$

N – počet soběpodobných oblastí r – velikost oblasti D – dimenze objektu

3 METODA VÝPOČTU POLÍČEK

Před vlastním zpracováním se originální obraz na obr. 1 vlevo převede na černobílý pomocí detekce hran, viz obr. 1 vpravo. Jako příklad byla vybrána fotografie stromové kůry.



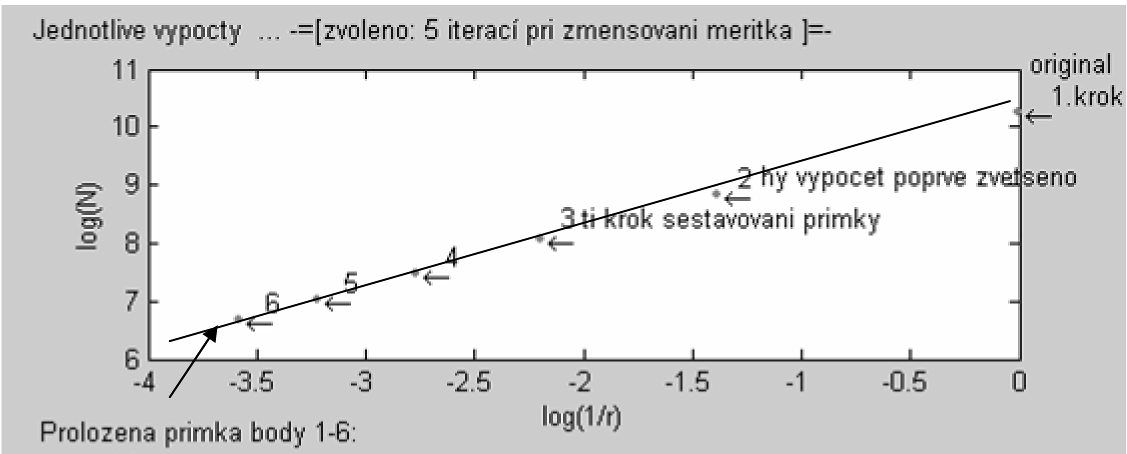
Obr. 1: *Analyzovaná textura stromové kůry. Fraktální koeficient tohoto obrázku, získaný metodou BCM je D_{BCM} =1,1117.*

Podstatou této lineární regresní analýzy je zjištění strmosti přímky proložené vynesením závislostí logaritmu počtu oblastí *N* na logaritmu velikosti sítě *r*. [2] Volbou hledané soběpodobné oblasti v síti je bílý čtverec s určenou velikostí. Plocha *r* závislá na úrovni rozlišení *L* je v ***1.*** *kroku* ***1*** *pixel, v* ***2.*** *kroku* ***4*** *pixely, atd*. Vyhledání soběpodobných oblastí se provede na každé úrovni zvlášť. V matematickém vyjádření se úpravou rovnice (1) dostane tvar (2) uvedený níže. Ten se srovná s rovnicí (3), také v textu později uvedena. Rovnice (3) představuje polynom prvního stupně. Hledané *k* představuje směrnici.

$$\log(N) = D \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2)$$

$$y = k \cdot x \qquad (3)$$

Směrnice je rovna hodnotě fraktální dimenze D platné pro všechna rozlišení, tzv. fraktálnímu koeficientu. Fraktální koeficient vypočítaný touto metodou se označí D_{BCM}.



Obr. 2: *Výpočty BCM na analyzované textuře*

4 METODA VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Je založena na výpočtu výkonového spektra signálu pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT), resp. FFT [2]. Výkonové spektrum P_i je počítáno jako:

$$P_i = \left(\sqrt{\mathrm{Re}(k_i)^2 + \mathrm{Im}(k_i)^2} \right)^2 = \mathrm{Re}(k_i)^2 + \mathrm{Im}(k_i)^2 \qquad (4)$$

$\mathrm{Re}(\bullet)$…reálná část výkonového spektra

$\mathrm{Im}(\bullet)$…imaginární část výkonového spektra

k_i … je prostorová frekvence (úhlový kmitočet) signálu na i-té hodnotě

Dále se uvažuje model ideálního výkonového spektra $\hat{P}_i$. Ten se vezme jako model jednodimenzionálního fraktálního signálu [2].

$$\hat{P}_i = c \cdot \frac{1}{|k_i|^{\beta}} = c \cdot |k_i|^{-\beta} \qquad (5)$$

c…konstanta výkonového spektra

β…spektrální exponent

Spektrální exponent vztahující se k fraktální dimenzi (dále jen D_F), určené touto metodou lze vyjádřit vztahem (6). Jeho odvození se najde ve zdroji [2].

$$\beta = \frac{N\sum_{i=1}^{N}(\ln P_i)(\ln|k_i|) - \left(\sum_{i=1}^{N}\ln|k_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\ln P_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\ln|k_i|\right)^2 - N\sum_{i=1}^{N}(\ln|k_i|)^2} \qquad (6)$$

Kde N má význam počtu vzorků spektra. Pro získání hodnoty fraktální dimenze je cílem najít β a odtud posledním kroku spočítat D_F.

$$D_F = \frac{5-\beta}{2} \qquad (7)$$

5 ZÁVĚR

Byla realizována metoda BCM pro výpočet fraktálního koeficientu a výsledky získané touto metodou byly ověřeny na několika obrazech. Vytvořená funkce umožňuje odhadnout fraktální koeficient libovolného obrazu, resp. textury objektu. Dále byla popsána alternativní metoda pro odhad fraktálního koeficientu, která bude testována v další práci.

LITERATURA

[1] Wlodzimierz, K.: Signal and Image analysis using Chaos theory and Fractal Geometry. Machine Graphics & Vision, vol. 9, no.1/2, pp. 403-431, 2000.

[2] Turner, J., T.: Fractal Geometry in Digital Imaging, Leicester, Academic Press 1998, ISBN 0-12-703970-8